

具有退化非局部强阻尼的 Kirchhoff 型梁方程的 长时间动力学行为*

徐玲, 谢婧怡

西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州 730070

摘要: 研究了一类具有退化非局部强阻尼的 Kirchhoff 型梁方程解的存在唯一性, 全局吸引子与强全局吸引子的存在性. 首先, 应用 Faedo-Galerkin 逼近和插值不等式证明了弱解的存在唯一性; 其次, 通过构造有界吸收集, 证明解半群的渐近紧性, 从而得到系统在拓扑空间 \mathcal{H} 存在全局吸引子; 最后利用范数到弱连续半群理论和条件 (C), 证明了系统在强拓扑空间 $\mathcal{H}_{1,q}$ 存在全局吸引子.

关键词: 梁方程; Kirchhoff 型; 退化的非局部强阻尼; 弱解的存在唯一性; 全局吸引子

中图分类号: O175.29 **文献标志码:** A **文章编号:** 2097-0137(XXXX)XX-0001-12

Long-time dynamics for a Kirchhoff beam equation with degenerate nonlocal strong damping

Xu Ling, Xie Jingyi

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China

Abstract: The existence and uniqueness of solutions, as well as the existence of global attractors and strong global attractors are investigated for a class of Kirchhoff-type beam equations with degenerate nonlocal strong damping. Firstly, we establish the existence and uniqueness of weak solutions by employing the Faedo-Galerkin approximation along with interpolation inequalities. Secondly, by constructing a bounded absorbing set, we establish the asymptotic compactness of the solution semigroup, and thereby obtain the existence of a global attractor in the topological space \mathcal{H} . Finally, we apply the norm-to-weak continuous semigroup theory and condition (C), to show that the system also has a global attractor in the stronger topological space $\mathcal{H}_{1,q}$.

Key words: beam equation; Kirchhoff-type; degenerate nonlocal strong damping; existence and uniqueness of weak solutions; global attractor

本文主要研究具有退化非局部强阻尼的 Kirchhoff 型梁方程

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u + \left(\kappa - \beta \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \Delta u - \gamma \left(\|\Delta u\|^2 + \|u_t\|^2 \right)^q \Delta u_t + f(u) = 0, & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, t) = \Delta u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

* 收稿日期: 2026-01-15

录用日期: 2026-04-07

网络首发日期: XXXX-XX-XX

基金项目: 国家自然科学基金(12561041, 12371198)

作者简介: 徐玲(1983年生), 女; 研究方向: 无穷维动力系统; E-mail: xuling@nwnu.edu.cn



ZR20260022

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界的 C^∞ 区域, $(\kappa - \beta \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx) \Delta u$ 刻画了板的伸缩性, κ 为伸缩参数, β 为非线性刚度系数, $\gamma (\|\Delta u\|^2 + \|u_t\|^2)^q \Delta u$ 是退化的非局部能量阻尼项, $f(u)$ 为非线性项. 对方程中的参数及非线性项 f 作出如下假设:

$$(A_1) \beta, \gamma > 0, q \geq 1, \kappa \in \mathbb{R};$$

$$(A_2) f \in C^1(\mathbb{R}), f(0) = 0, \text{ 对于任意的 } s \in \mathbb{R},$$

$$\liminf_{|s| \rightarrow \infty} f'(s) > -\lambda_1, \quad |f'(s)| \leq C(1 + |s|^{p-1}),$$

其中 $\lambda_1 > 0$ 是算子 $A = \Delta^2$ 在简支边界下的第一特征值, 常数 $C > 0$, 当 $1 \leq n \leq 4$ 时, $1 \leq p < +\infty$; 当 $n \geq 5$ 时, $1 \leq p \leq \frac{4}{n-4}$.

可伸缩梁方程是一类用于描述在外载荷作用下发生横向非线性振动的大挠度柔性结构的高阶非线性发展方程, 广泛应用于桥梁, 飞机机翼等工程结构的动力学建模. 该方程最早由 Woinowsky-Krieger (1950) 建立. 随后, Berger (1955) 提出了 Berger 方程

$$u_{tt} + \Delta^2 u + (\alpha - \beta \|\nabla u\|^2) \Delta u = f,$$

其中参数 α 描述施加在梁上的平面力, 系数 β 与 $\|\nabla u\|^2$ 共同构成中面拉伸效应项. Yao et al. (2017) 延续了 Berger 方程通过位移梯度衡量中面拉伸效应的方法, 引入了 Kirchhoff 非线性项 $(\kappa - \beta \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx) \Delta u$, 用以反映拉伸或压缩刚度随位移梯度变化的非线性效应. 其中, 参数 $\beta > 0$ 表示材料的非线性刚度特性, 通常与弹性模量及结构几何参数有关, 而 κ 表示初始轴向力 ($\kappa > 0$ 表示拉伸, $\kappa < 0$ 表示压缩). 具有该项的梁或板方程的长时间动力学行为已被广泛研究 (Yang et al., 2017; Meng et al., 2019). 当 $\kappa = \beta = 0$ 时, 方程退化为一般的梁方程, 对这类方程的研究已有很多结果, 如 Medeiros (1979) 讨论了解的存在唯一性, 马巧珍等 (2007) 研究了强全局吸引子的存在性.

对于非退化非局部阻尼的板或梁方程解的长时间动力学行为, 已有较为系统的抽象理论框架 (Chueshov et al., 2008). 在此基础上, Sun et al. (2022a) 考虑了具有非退化能量强阻尼的可伸缩梁方程

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \kappa \phi (\|\nabla u\|^2) \Delta u - M (\|\xi_u\|_{H^1}^2) \Delta u_t + f(u) = h,$$

其中假设 M 在 \mathbb{R}_+ 上为正, 他们建立了解的适定性与正则性, 证得强全局吸引子及指数吸引子存在, 并分析了吸引子在参数 κ 扰动下的上半连续性与 Hölder 连续性. 随后, Sun et al. (2022b) 将上述结果推广到包含旋转惯量项的情形, 证明了全局吸引子和指数吸引子的存在性.

近年来, 关于退化型阻尼的研究逐渐展开, 并取得了一系列进展: 针对柔性飞行结构的振动问题, Balakrishnan (1988) 和 Balakrishnan et al. (1989) 提出非局部能量阻尼模型

$$u_{tt} - 2\zeta \sqrt{\lambda} u_{xx} + \lambda u_{xxxx} - \gamma \left(\int_{-L}^L (\lambda |u_{xx}|^2 + |u_t|^2) dx \right)^q u_{xxt} = 0, \quad (2)$$

其中 $u = u(x, t)$ 表示静止状态下长度为 $2L > 0$ 的梁的横向挠度, $\gamma > 0$ 是阻尼系数, ζ 是 Krylov-Bogoliubov 近似方法中引入的一个常数, 且 $\lambda = 2\zeta\omega/\sigma^2$, 其中 ω 是模型频率, σ^2 是高斯外力的谱密度. 该模型反映了工程中振动耗散依赖于系统总能量的物理机制. 以气流中振动的梁或板为例, 其材料内部的耗散强度并不是常数, 而是与结构当前的总振动能量 (动能与弹性势能) 密切相关. 即阻尼随振动与能量的增大而增强, 随能量趋于零而减弱甚至消失, 呈现退化特性. 在此基础上, Silva et al. (2019) 中将模型 (2) 加入了非线性项 $f(u)$, 建立了可伸展梁模型

$$u_{tt} - \kappa \Delta u + \Delta^2 u - \gamma (\|\Delta u\|^2 + \|u_t\|^2)^q \Delta u_t + f(u) = 0. \quad (3)$$

对一类具有退化非局部强阻尼的梁模型, 首次获得强解的存在唯一性结果, 并给出了相应的稳定性分析. 随后, Cavalcanti et al. (2021) 进一步研究了该类退化阻尼可伸长梁模型的稳定性, 揭示了非恒定伸长系数下能量解稳定的困难性. Gomes Tavares et al. (2023) 系统对比了可伸缩梁在退化与非退化非局部阻尼情形下的长期动力学行为. Yan et al. (2025) 进一步研究了模型 (3) 弱解的存在唯一性以及全局吸引子和强吸引子的存在性.

受上述文献启发, 本文试图考虑具有退化的非局部强阻尼的 Kirchhoff 型梁方程(1)的全局吸引子和强吸引子存在性. 本文的困难主要有两个方面: 一是退化的非局部强阻尼在应用 Galerkin 逼近时由于阻尼的非线性和退化性导致很难直接逼近; 二是为证明更高正则空间 $\mathcal{H}_{1/q}$ 中的全局吸引子存在性, 需要获得弱解在任意时间内的高阶正则性.

在本篇论文中, 用符号 C 表示某个正常数, 并且同一行中的符号 C 也有可能表示不同的正常数, 同时 $C(\cdot)$ 仍表示一个正常数, 其值取决于括号中的量.

1 预备知识

记

$$L^p = L^p(\Omega), \quad \|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^p},$$

其中 $p \geq 1$. (\cdot, \cdot) 记 $L^2(\Omega)$ 空间中的内积.

设 $W^{s,p} = W^{s,p}(\Omega)$ 为 Sobolev-Slobodeckij 空间, 其中 $0 \leq s < +\infty, 1 < p < +\infty$. 当 $s = 0, 1, 2, \dots$ 时与经典 Sobolev 空间一致. 记 $W_0^{s,p}$ 为 $C_c^\infty(\Omega)$ 在 $W^{s,p}$ 中的闭包. 另外, 定义空间 $H^s := W^{s,2}, H_0^s := W_0^{s,2}$. 根据 Sobolev 嵌入定理可知

$$H \hookrightarrow L^q, \quad \frac{1}{q} \geq \frac{1}{2} - \frac{s}{n}, \quad s \geq 0, \quad 2 \leq q < +\infty.$$

在简支边界条件 $u|_{\partial\Omega} = 0, \Delta u|_{\partial\Omega} = 0$ 下, 定义算子 $A = \Delta^2$, 定义域为

$$D(A) = \{u \in H^4(\Omega) \mid u|_{\partial\Omega} = 0, \Delta u|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

对任意 $u, v \in D(A)$, 有 $(Au, v) = (\Delta u, \Delta v)$, 则 A 是 L^2 上的自伴正定算子. 因此存在一系列特征值 $\{\lambda_i\}_{i \geq 1}$ 和对应的特征函数 $\{e_i\}_{i \geq 1}$, 满足

$$Ae_i = \lambda_i e_i, \quad 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i = +\infty, \quad (4)$$

其中 $\{e_i\}_{i \geq 1}$ 为 L^2 中一组的标准正交基.

定义幂算子

$$A^s u = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \lambda_i^s e_i, \quad u = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i \in D(A^s), \quad s \in \mathbb{R},$$

其中 $D(A^s) = \{u \mid u \in L^2, A^s u \in L^2\}$ 是 Hilbert 空间, 其内积和范数为

$$(u, v)_{D(A^s)} = (A^s u, A^s v), \quad \|u\|_{D(A^s)} = \|A^s u\|.$$

特别地, $D(A^{1/2}) = H^2 \cap H_0^1, D(A^{1/4}) = H_0^1$. 对任意 $s \in [0, 1]$, 有 $D(A^s) \hookrightarrow H^{4s}$. 对于任意的 $\alpha > \beta$ 满足紧嵌入

$$D(A^\alpha) \hookrightarrow D(A^\beta). \quad (5)$$

根据算子 A 定义可知, 对于任意 $u \in D(A^r) \cap D(A^t)$, 都有

$$\|A^s u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|A^t u\|_{L^2(\Omega)}^\theta \|A^r u\|_{L^2(\Omega)}^{1-\theta}, \quad \forall u \in D(A^r) \cap D(A^t), \quad (6)$$

其中 $-\infty < r \leq s \leq t < +\infty$ 且 $s = \theta r + (1 - \theta)t$ ($\theta \in [0, 1]$). 此外, 对任意 $s \in \mathbb{R}, D(A^{-s})$ 记为 $D(A^s)$ 的对偶空间.

定义 Hilbert 空间 $V_s = D(A^{s/4})$, 其内积和范数分别为

$$\langle u, v \rangle_{V_s} = (A^{s/4} u, A^{s/4} v), \quad \|u\|_{V_s} = \|A^{s/4} u\|.$$

定义相空间

$$\mathcal{H} = V_2 \times L^2, \quad \mathcal{H}_s = V_{s+2} \times V_s, \quad s \in \mathbb{R},$$

其上范数为

$$\|u\|_s = \|u\|_{V_s}, \quad \|(u, v)\|_{\mathcal{H}_s}^2 = \|u\|_{2+s}^2 + \|v\|_s^2.$$

当 $s = 0$ 时, 记 $H = H_0$. 根据上述定义, 对于任意 $s \in [0, 4]$, 均有连续嵌入 $V_s \hookrightarrow H_s$.

由 Poincaré 不等式可知

$$\|u\|_2^2 \geq \lambda_1 \|u\|^2, \quad \|u\|_2^2 \geq \lambda_1^{1/2} \|u\|_1^2, \quad \forall u \in V_2. \quad (7)$$

为方便起见, 方程(1)改写为

$$\begin{cases} u_t + Au - \left(\kappa - \beta \int_{\Omega} \|u\|_1^2 dx \right) A^{1/2} u + \gamma \|(u, u_t)\|_H^{2q} A^{1/2} u_t + f(u) = 0, \\ (u(0), u_t(0)) = (u_0, u_1), \\ u|_{\partial\Omega} = \Delta u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

注1 根据假设条件(A₂)和微分中值定理可知,存在常数 $C > 0$ 使得

$$|f(s)| \leq C(1 + |s|^p)|s|, \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad (9)$$

进一步,令 $F(s) = \int_0^s f(\tau) d\tau$, 根据式(7)和式(9),存在常数 $C > 0$ 和 $\mu \in [0, \lambda_1)$, 有

$$\int_{\Omega} F(s) dx \geq -\frac{\mu}{2} \|s\|^2 - C \geq -\frac{\mu}{2\lambda_1} \|s\|_2^2 - C, \quad (10)$$

$$(f(s), s) \geq \int_{\Omega} F(s) dx - \frac{\mu}{2} \|s\|^2 - C. \quad (11)$$

下面将介绍本文证明所需的一些预备结果.

定义1 (Chepyzhov et al., 2002) 设 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 是作用在度量空间 (X, d) 上的半群. 若满足以下条件

- (i) (紧性) \mathcal{A} 在 X 中是紧的;
- (ii) (不变性) $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}, \forall t \geq 0$;
- (iii) (吸引性) 对任何有界集 $B \subset X$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时

$$\text{dist}_X(S(t)B, \mathcal{A}) := \sup_{x \in S(t)B} \inf_{y \in \mathcal{A}} d(x, y) \rightarrow 0.$$

则 X 中子集 \mathcal{A} 称为 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 的全局吸引子.

定义2 (Zhong et al., 2006) 设 X, Y 为 Banach 空间, $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 是 X 上的半群. 若 $S(t)X \subset Y (t > 0)$, 且对任意 $(\xi_n, t_n) \rightarrow (\xi, t)$ 在 $X \times (0, +\infty)$ 中强收敛, 有 $S(t_n)\xi_n \rightarrow S(t)\xi$ 在 Y 中弱收敛, 则称 $\{S(t)\}$ 为范数到弱连续的 (X, Y) -半群.

引理1 (Zhong et al., 2006) 设 $\{S(t)\}$ 为 (X, Y) -半群, 且满足

- (i) 嵌入 $i: Y \rightarrow X$ 及其对偶 $i^*: X^* \rightarrow Y^*$ 均为稠定单射;
- (ii) $\{S(t)\}$ 在 X 上连续 (或弱连续);
- (iii) $\{S(t)\}$ 将 $X \times (0, +\infty)$ 中的紧集映射为 Y 中的有界集.

则 $\{S(t)\}$ 是范数到弱连续的 (X, Y) -半群.

定义3 (Ma et al., 2002) (条件(C)) 对于任意有界集 $B \subset X$ 和任意 $\delta > 0$, 存在 $t_B > 0$ 与一个依赖于 B 和 δ 的有限维子空间 $X_{\delta} \subset Y$ (P 为 $X \rightarrow X_{\delta}$ 上的有界线性投影), 使得

$$\sup_{x \in B} \|(I - P)S(t)x\|_X \leq \delta, \quad \forall t \geq t_B.$$

且集合 $\{PS(t)x: x \in B, t \geq t_B\}$ 在 X 中有界, 则半群 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 在 Banach 空间 X 中满足条件(C).

定义4 (Babin et al., 1992) 设 X, Y 为 Banach 空间, $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 为 (X, Y) -半群, 若满足

- (i) \mathcal{A} 在 X 中有界, 且在 Y 中紧;
- (ii) \mathcal{A} 对半群不变: $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$, 对所有 $t \geq 0$ 成立;
- (iii) 对任意有界 $B \subset X$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时

$$\text{dist}_Y(S(t)B, \mathcal{A}) \rightarrow 0.$$

则称集合 $\mathcal{A} \subset X \cap Y$ 为其 (X, Y) -全局吸引子.

定义5 对于给定 $T > 0$, 函数 $(u, u_t) \in L^{\infty}(0, T; H)$ 是方程(8)在 $[0, T]$ 上的一个弱解, 即对任意 $\phi \in C_c^{\infty}((0, T) \times \Omega)$,

$$-\int_0^T (u_t, \phi_t) dt + \kappa \int_0^T (A^{1/4} u, A^{1/4} \phi) dt + \int_0^T (A^{1/2} u, A^{1/2} \phi) dt + \gamma \int_0^T \|(u, u_t)\|_H^{2q} (A^{1/4} u_t, A^{1/4} \phi) dt + \int_0^T (f(u), \phi) dt = 0$$

成立.

引理2 (Zhong et al., 2006) 设 X, Y 是两个 Banach 空间, $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 是一个范数到弱连续的 (X, Y) -半群.

若 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 满足

- (i) $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 在 Y 中存在有界吸收集;
- (ii) $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 在 Y 中满足条件 (C).

则 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 拥有一个 (X, Y) -全局吸引子.

根据式 (4), 定义有限维子空间 $H_m = \text{span}\{e_1, \dots, e_m\}$, 并记 $P_m: L^2 \rightarrow H_m$ 为从 L^2 到 H_m 的正交投影算子, $Q_m = I - P_m$ 为其对应的正交补投影 (其中 I 为 L^2 上的恒等算子).

引理 3 (Yan et al., 2025) 对任意固定的 $\sigma \in \mathbb{R}$ 和 V_σ 的任意紧子集 \mathcal{K} , 以及任意足够小的 $\delta > 0$, 都存在 $M \in \mathbb{N}$ 满足

$$\sup_{v \in \mathcal{K}} \|Q_m v\|_\sigma < \delta, \quad \forall m \geq M.$$

2 弱解的存在唯一性

定理 1 假设条件 (A_1) 和 (A_2) 成立, 设 $T > 0$ 为任意正常数, 则有

- (i) 若初值 $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}$, 则问题 (8) 存在弱解 u , 即对任意 $0 < a < T$, 有

$$(u, u_t) \in L^\infty(a, T; \mathcal{H}_s),$$

其中 $s = 1/q$.

- (ii) 该弱解满足

$$\|(u(t), u_t(t))\|_{\mathcal{H}_s}^2 + \int_0^t \|(u(\tau), u_t(\tau))\|_{\mathcal{H}_s}^{2q} \|u_t(\tau)\|_1^2 d\tau \leq \mathcal{Q}_1(\|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{H}}), \quad \forall t \in [0, T],$$

$$\|(u(t), u_t(t))\|_{\mathcal{H}_s}^2 + \int_t^{t'} \|(u(\tau), u_t(\tau))\|_{\mathcal{H}_s}^{2q} \|u_t(\tau)\|_{1+s}^2 d\tau \leq t^{-(1+s)} \mathcal{Q}_2(\|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{H}}, T), \quad \forall 0 < t \leq t' \leq T,$$

其中 $s = 1/q$, 且 $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$ 是独立于解 u 和时间 t 的单调递增函数 (仅依赖于初值范数与总时间 T).

- (iii) 弱解满足能量等式

$$E(u(t)) + \gamma \int_\tau^t \|(u(s), u_t(s))\|_{\mathcal{H}_s}^{2q} \|u_t(s)\|_1^2 ds = E(u(\tau)), \quad \forall 0 \leq \tau \leq t \leq T. \quad (12)$$

定义能量泛函为

$$E(u) = \frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{1}{2} \|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\sqrt{2\beta}} \|u\|_1^2 - \frac{\kappa}{\sqrt{2\beta}} \right)^2 + \int_\Omega F(u) dx. \quad (13)$$

特别地, 有 $(u, u_t) \in C([0, T]; \mathcal{H})$.

证明 (i) 的证明利用 Faedo-Galerkin 逼近并结合插值不等式即可证得, 在此省略详细推导. 接下来直接给出证明过程中的关键结论, 这些结论将用于后续的证明.

假设 $\|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{H}} \leq R$, 则对所有 $n \in \mathbb{N}$, 有 $\|(u_0^n, u_1^n)\|_{\mathcal{H}} \leq R$. 令

$$u_n(t) = \sum_{j=1}^n T_j^n(t) e_j \in \text{span}\{e_1, \dots, e_n\},$$

其中 $t \in [0, T_n]$ 且 $T_n \in [0, T]$. 由此, 对于任意 $t \in [0, T]$, 可得

$$\|(u^n(t), u_t^n(t))\|_{\mathcal{H}_s}^2 + \int_0^t \|(u^n(\tau), u_t^n(\tau))\|_{\mathcal{H}_s}^{2q} \|u_t^n(\tau)\|_1^2 d\tau \leq C_R,$$

$$\|(u^n(t), u_t^n(t))\|_{\mathcal{H}_s}^2 \leq \frac{C_{R,T}}{t^{1+s}},$$

$$(u^n, u_t^n) \rightarrow (u, u_t) \quad \text{在 } L^\infty(0, T; \mathcal{H}) \text{ 弱*收敛,}$$

$$(u^n, u_t^n) \rightarrow (u, u_t) \quad \text{在 } L^\infty(a, T; \mathcal{H}_s) \text{ 弱*收敛, } \forall a > 0,$$

$$\|(u^n, u_t^n)\|_{\mathcal{H}_s}^q A^{\frac{1}{4}} u_t^n \rightarrow \eta \quad \text{在 } L^2(0, T; L^2) \text{ 弱收敛, 其中 } \eta \in L^2(0, T; L^2),$$

$$\|(u^n, u_t^n)\|_{\mathcal{H}_s}^q A^{\frac{1+s}{4}} u_t^n \rightarrow \eta^a \quad \text{在 } L^2(a, T; L^2) \text{ 弱收敛, 其中 } \eta^a \in L^2(a, T; L^2),$$

$$u_t^n \rightarrow u_t \quad \text{在 } L^\infty(0, T; V_{-2}) \text{ 弱*收敛,}$$

$$\|(u^n, u_t^n)\|_{\mathcal{H}_s}^{2q} \rightarrow \|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}_s}^{2q} \quad \text{在 } [0, T] \text{ 上几乎处处成立.}$$

(ii) 对于所有 $\phi \in L^2(0, T; V_1)$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 由上文结论和 Lebesgue 控制收敛定理可知

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \left(\|(u^n, u_t^n)\|_{\mathcal{H}}^q A^{\frac{1}{4}} u_t^n - \|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^q A^{\frac{1}{4}} u_t, \phi \right) dt \right| \\ & \leq \left| \int_0^T \|(u^n, u_t^n)\|_{\mathcal{H}}^q \left(A^{\frac{1}{4}} u_t^n - A^{\frac{1}{4}} u_t, \phi \right) dt \right| + \left| \int_0^T \left[\|(u^n, u_t^n)\|_{\mathcal{H}}^q - \|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^q \right] \left(A^{\frac{1}{4}} u_t, \phi \right) dt \right| \\ & \leq \left| \int_0^T \|(u^n, u_t^n)\|_{\mathcal{H}}^q \left(u_t^n - u_t, A^{\frac{1}{4}} \phi \right) dt \right| + C_R \int_0^T \left| \|(u^n, u_t^n)\|_{\mathcal{H}}^q - \|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^q \right| \|\phi\|_1 dt \rightarrow 0, \end{aligned}$$

则 $\|(u^n, u_t^n)\|_{\mathcal{H}}^q A^{\frac{1}{4}} u_t^n \rightarrow \|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^q A^{\frac{1}{4}} u_t$ 在 $L^2(0, T; V_{-1})$ 中收敛. 由极限的唯一性可知

$$\|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^q A^{\frac{1}{4}} u_t = \eta \in L^2(0, T; L^2).$$

根据弱*下半连续性, 对任意 $t \in [0, T]$, 由上文的结论推得

$$\|(u(t), u_t(t))\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_0^t \|(u(\tau), u_t(\tau))\|_{\mathcal{H}}^{2q} \|u_t(\tau)\|_1^2 d\tau \leq C_R.$$

同理可证得, 对任意 $0 < t \leq t' \leq T$, 有

$$\|(u(t), u_t(t))\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_t^{t'} \|(u(\tau), u_t(\tau))\|_{\mathcal{H}}^{2q} \|u_t(\tau)\|_{1+s}^2 d\tau \leq \frac{C_{R,T}}{t^{1+s}}.$$

(iii) 能量等式的证明可参考 (Yan et al., 2025), 故省略不证. \square

下面的引理表明, 在任意有限时间区间, 只要初始能量不为零, 解的能量都不会退化到 0, 从而消除了阻尼项在有限时间内的退化性, 是方程 (8) 弱解唯一性成立的必要条件.

引理 4 (Yan et al., 2025) 对于任意固定的 $R > 0$ 和紧集 $K \subset \left\{ \xi \in \mathcal{H} \mid \frac{R}{2} \leq \|\xi\|_{\mathcal{H}} \leq R \right\}$ (其中 $\xi = (u, u_t)$),

存在常数 $k = k(R, T, K) > 0$, 使得对任意初值属于 K 的弱解 $u(t)$, 当 $t \in [0, T]$ 时都有 $\|(u(t), u_t(t))\|_{\mathcal{H}} \geq k$.

定理 2 假设条件 (A₁) 和 (A₂) 成立, 对于任意 $t \in [0, T]$, $\xi_u(t), \xi_v(t) \in K$ 是方程 (8) 的两个弱解, 则对于任意 $t \in [0, T]$, 有

$$\|\xi_u(t) - \xi_v(t)\|_{\mathcal{H}} \leq C \|\xi_u(0) - \xi_v(0)\|_{\mathcal{H}}, \quad (14)$$

其中常数 $C = C(R, T, K) > 0$. 特别地, 若初值为零时, 即 $\|\xi_u(0)\|_{\mathcal{H}} = 0$, 其唯一解为 $u \equiv 0$.

证明 如果 $\|\xi_u(0)\|_{\mathcal{H}} = 0$, 由引理 4 可推得

$$\|(u(t), u_t(t))\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_T \|\xi_u(0)\|_{\mathcal{H}}^2 = 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

因此, $(u, u_t) \equiv 0$ 是唯一的解.

对于固定的 $R > 0$, 令 $K \subset \left\{ \xi \in \mathcal{H} \mid R/2 \leq \|\xi\|_{\mathcal{H}} \leq R \right\}$ 为任意紧集, 假设 $\xi_u(t) = (u(t), u_t(t))$, $\xi_v(t) = (v(t), v_t(t))$ 是关于初值 $\xi_u(0) \in K, \xi_v(0) \in K$ 的两个弱解, 使得

$$k \leq \|(u(t), u_t(t))\|_{\mathcal{H}} \leq C_R, \quad k \leq \|(v(t), v_t(t))\|_{\mathcal{H}} \leq C_R, \quad \forall t \in [0, T],$$

其中 $k = k(R, T, K) > 0$. 由式 (12) 可以推出

$$\gamma k^{2q} \int_0^t \|u_t\|_1^2 d\tau \leq \gamma \int_0^t \|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^{2q} \|u_t\|_1^2 d\tau \leq C_R, \quad (15)$$

$$\gamma k^{2q} \int_0^t \|v_t\|_1^2 d\tau \leq \gamma \int_0^t \|(v, v_t)\|_{\mathcal{H}}^{2q} \|v_t\|_1^2 d\tau \leq C_R,$$

$$\int_0^t \|u_t\|_1^2 d\tau \leq \frac{C_R}{\gamma k^{2q}}, \quad \int_0^t \|v_t\|_1^2 d\tau \leq \frac{C_R}{\gamma k^{2q}}, \quad \forall t \in [0, T].$$

令 $w(t) = u(t) - v(t)$ 满足

$$\begin{cases} w_u + Aw - \left[(\kappa - \beta \|u\|_1^2) A^{1/2} u - (\kappa - \beta \|v\|_1^2) A^{1/2} v \right] + \gamma \|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^{2q} A^{\frac{1}{2}} w_t \\ \quad + \gamma \left[\|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^{2q} - \|(v, v_t)\|_{\mathcal{H}}^{2q} \right] A^{\frac{1}{2}} v_t + f(u) - f(v) = 0, \\ (w(0), w_t(0)) = \xi_u(0) - \xi_v(0). \end{cases} \quad (16)$$

将式(16)的两端同时乘以 w_i , 可得

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(w) + 2\gamma \left\| (u, u_i) \right\|_{\mathcal{H}}^{2q} \left\| w_i \right\|_1^2 = I_1 + I_2 + I_3, \quad (17)$$

其中 $\mathcal{E}(w) = \left\| w_i \right\|^2 + \left\| w \right\|_2^2$, 且

$$\begin{aligned} I_1 &= -2\gamma \left[\left\| (u, u_i) \right\|_{\mathcal{H}}^{2q} - \left\| (v, v_i) \right\|_{\mathcal{H}}^{2q} \right] \left(A^{\frac{1}{4}} v_i, A^{\frac{1}{4}} w_i \right), \\ I_2 &= -2 \left(f(u) - f(v), w_i \right), \\ I_3 &= \left((\kappa - \beta \left\| u \right\|_1^2) A^{1/2} u - (\kappa - \beta \left\| v \right\|_1^2) A^{1/2} v, w_i \right). \end{aligned}$$

由中值定理和 Young 不等式, 有

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq 2q\gamma \left[\left\| (u, u_i) \right\|_{\mathcal{H}}^{2(q-1)} + \left\| (v, v_i) \right\|_{\mathcal{H}}^{2(q-1)} \right] \left(\left\| (u, u_i) \right\|_{\mathcal{H}}^2 - \left\| (v, v_i) \right\|_{\mathcal{H}}^2 \right) \left\| v_i \right\|_1 \left\| w_i \right\|_1 \\ &\leq C_R \left(\left\| (u, u_i) \right\|_{\mathcal{H}} + \left\| (v, v_i) \right\|_{\mathcal{H}} \right) \left(\left\| (u, u_i) \right\|_{\mathcal{H}} - \left\| (v, v_i) \right\|_{\mathcal{H}} \right) \left\| v_i \right\|_1 \left\| w_i \right\|_1 \\ &\leq C_R \left\| (w, w_i) \right\|_{\mathcal{H}} \left\| v_i \right\|_1 \left\| w_i \right\|_1 \leq \gamma k^{2q} \left\| w_i \right\|_1^2 + C_{k,R} \left\| (w, w_i) \right\|_{\mathcal{H}}^2 \left\| v_i \right\|_1^2 \\ &\leq \gamma k^{2q} \left\| w_i \right\|_1^2 + C_{k,R} \left\| v_i \right\|_1^2 \mathcal{E}(w). \end{aligned} \quad (18)$$

根据中值定理和 Hölder 不等式以及 Soblev 嵌入 $V_2 \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-4}} \hookrightarrow L^{\frac{np}{2}}$, 可推得

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq C \left((1 + |u|^p + |v|^p) |w|, |w_i| \right) \leq C \left(1 + \left\| |u|^p \right\|_{L^{\frac{p}{2}}} + \left\| |v|^p \right\|_{L^{\frac{p}{2}}} \right) \left\| w \right\|_{L^{\frac{2n}{n-4}}} \left\| w_i \right\| \\ &\leq C \left(1 + \left\| u \right\|_2^p + \left\| v \right\|_2^p \right) \left\| w \right\|_2 \left\| w_i \right\| \leq C_R \mathcal{E}(w). \end{aligned} \quad (19)$$

利用 Hölder 不等式和 Young 不等式得

$$\begin{aligned} |I_3| &= \left| \left((\kappa - \beta \left\| u \right\|_1^2) A^{1/2} u - (\kappa - \beta \left\| v \right\|_1^2) A^{1/2} v, w_i \right) \right| \leq \left| \kappa \left\| w \right\|_2 \left\| w_i \right\| \right| + \left| \left(\beta \left\| u \right\|_1^2 A^{1/2} u - \beta \left\| v \right\|_1^2 A^{1/2} v, w_i \right) \right| \\ &\leq \frac{\gamma k^{2q}}{\kappa} \left\| w \right\|_2^2 + \frac{1}{2\gamma k^{2q}} \left\| w_i \right\|_1^2 + \beta \left\| u \right\|_1^2 \left\| w \right\|_2 \left\| w_i \right\| + \beta \left(\left\| u \right\|_1^2 + \left\| v \right\|_1^2 \right) \left\| v \right\|_2 \left\| w_i \right\| \\ &\leq \left(\frac{\gamma k^{2q}}{2} \kappa^2 + \frac{C_{R,\lambda_1} \beta \gamma k^{2q}}{2} \right) \left\| w \right\|_2^2 + \left(\frac{1}{2\gamma k^{2q}} + \frac{C_{R,\lambda_1} \beta}{2\gamma k^{2q}} \right) \left\| w_i \right\|_1^2 \leq C_{\kappa,k,\beta,R,\lambda_1} \mathcal{E}(w). \end{aligned} \quad (20)$$

将式(18)~(20)代入式(17), 有

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(w) + \gamma k^{2q} \left\| w_i \right\|_1^2 \leq C_{\kappa,k,\beta,R} \left(1 + \left\| v_i \right\|_1^2 \right) \mathcal{E}(w).$$

再由 Gronwall 不等式和式(15)可得

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(w(t)) &\leq \mathcal{E}(w(0)) e^{\int_0^t C_{\kappa,k,\beta,R} (1 + \left\| v_i \right\|_1^2) ds} \leq C_{\kappa,k,\beta,R,T} \mathcal{E}(w(0)), \\ \left\| (w(t), w_i(t)) \right\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq C \left\| (w(0), w_i(0)) \right\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \forall t \in [0, T], \end{aligned}$$

其中 $C = C_{\kappa,k,\beta,R,\lambda_1,T}$, 则式(14)成立.

特别地, 取 $\xi_u(0) = \xi_v(0)$ 时, $(u, u_i) \equiv 0$ 是唯一的解. □

下面的引理在定理 3 的证明中起着关键作用.

引理 5 (Yan et al., 2025) 假设条件 (A_1) 和 (A_2) 成立, 方程(8)的弱解生成的解半群 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 中具有连续性, 即对任意序列 $(\xi_n, \tau_n) \subset \mathcal{H} \times [0, +\infty)$, 若 $(\xi_n, \tau_n) \rightarrow (\xi, \tau)$ 在 $\mathcal{H} \times [0, +\infty)$ 中强收敛于 (ξ, τ) , 则必有 $S(\tau_n)\xi_n \rightarrow S(\tau)\xi$ 在 \mathcal{H} 中强收敛.

3 全局吸引子在 \mathcal{H} 的存在性

下面首先给出方程(8)在空间 \mathcal{H} 中存在有界吸收集.

引理 6 假设条件 (A_1) 和 (A_2) 成立, 若存在有界集 $B_0 \subset \mathcal{H}$, 使得对任意有界集 $B \subset \mathcal{H}$, 存在 $t_B > 0$ 满足

$S(t)B \subset B_0$ 对所有 $t \geq t_B$ 成立, 则动力系统 $(\mathcal{H}, S(t))$ 是耗散的, 且 B_0 为 $(\mathcal{H}, S(t))$ 的一个有界吸收集.

证明 设 $B \subset \mathcal{H}$ 是任意有界集. 由式(12)可知, 存在常数 $C_B > 0$, 使得对于每个以 $(u(0), u_t(0)) \in B$ 为初始数据的弱解 u , 都有

$$\|(u(t), u_t(t))\|_{\mathcal{H}} \leq C_B, \quad \forall t \geq 0. \quad (21)$$

在方程(8)两端同时乘以 $u_t + \varepsilon u$ ($\varepsilon > 0$) 并在 Ω 上积分, 可得

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{1}{2} \|u\|_2^2 + \int_{\Omega} F(u) dx + \varepsilon(u_t, u) \right) + \varepsilon \left(\frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{1}{2} \|u\|_2^2 + \int_{\Omega} F(u) dx + \varepsilon(u_t, u) \right) \\ & + \gamma \|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^{2q} \|u_t\|_1^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|u\|_2^2 - \frac{3\varepsilon}{2} \|u_t\|^2 - \varepsilon^2(u_t, u) + \varepsilon \gamma \|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^{2q} \left(A^{\frac{1}{4}} u, A^{\frac{1}{4}} u \right) \\ & + \varepsilon(f(u), u) - \varepsilon \int_{\Omega} F(u) dx + \left(-(\kappa - \beta \|u\|_1^2) A^{1/2} u, u_t + \varepsilon u \right) = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

其中

$$\left(-(\kappa - \beta \|u\|_1^2) A^{1/2} u, u_t + \varepsilon u \right) \geq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\beta}{\sqrt{2\beta}} \|u\|_1^2 - \frac{\kappa}{\sqrt{2\beta}} \right)^2 + \varepsilon \left(\frac{\beta}{\sqrt{2\beta}} \|u\|_1^2 - \frac{\kappa}{\sqrt{2\beta}} \right)^2 - \frac{\varepsilon \kappa^2}{2\beta}.$$

定义泛函

$$E_{\varepsilon}(u) = \frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{1}{2} \|u\|_2^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\sqrt{2\beta}} \|u\|_1^2 - \frac{\kappa}{\sqrt{2\beta}} \right)^2 + \int_{\Omega} F(u) dx + \varepsilon(u_t, u)$$

和

$$\begin{aligned} \Psi &= \gamma \|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^{2q} \|u_t\|_1^2 + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\beta}{\sqrt{2\beta}} \|u\|_1^2 - \frac{\kappa}{\sqrt{2\beta}} \right)^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|u\|_2^2 - \frac{3\varepsilon}{2} \|u_t\|^2 - \varepsilon^2(u_t, u) \\ &+ \varepsilon \gamma \|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^{2q} \left(A^{\frac{1}{4}} u, A^{\frac{1}{4}} u \right) + \varepsilon(f(u), u) - \varepsilon \int_{\Omega} F(u) dx - \frac{\varepsilon \kappa^2}{2\beta}. \end{aligned} \quad (23)$$

则由式(22)可得

$$\frac{d}{dt} E_{\varepsilon}(u) + \varepsilon E_{\varepsilon}(u) + \Psi \leq 0. \quad (24)$$

结合假设条件 (A_2) , 式(9)~(10)和式(21)可知, 存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使得对于任意 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, 使得

$$c_1 \|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^{2q} - C_1 \leq E_{\varepsilon}(u) \leq C_B, \quad \forall t \geq 0, \quad (25)$$

其中常数 $0 < c_1 < 1, C_1 > 0$.

由 Young 不等式和 Sobolev 嵌入 $\|w\|^2 \leq C_{\Omega} \|w\|_1^2$, 存在常数 $C_2 = C_2(\Omega, q) > 0$, 使得

$$\|u_t\|^2 \leq \frac{1}{C_{\Omega}} \|u_t\|^{2q+2} + C_2 \leq \|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^{2q} \|u_t\|_1^2 + C_2. \quad (26)$$

利用 Cauchy 不等式和 Young 不等式, 结合式(7)和式(21), 推出

$$|\varepsilon^2(u_t, u)| \leq \alpha^2 \|u_t\| \|u\| \leq \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\lambda_1}} \|u_t\| \|u\|_2 \leq \frac{\varepsilon^3}{2\lambda_1} \|u\|_2^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|u_t\|^2, \quad (27)$$

$$\left| \varepsilon \gamma \|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^{2q} \left(A^{\frac{1}{4}} u, A^{\frac{1}{4}} u \right) \right| \leq \varepsilon \gamma \|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^{2q} \|u_t\|_1 \|u\|_1 \leq \frac{\gamma}{2} \|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^{2q} \|u_t\|_1^2 + \varepsilon^2 C_B \|u\|_2^2. \quad (28)$$

根据式(10)~(11), 可得

$$\varepsilon(f(u), u) - \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} F(u) dx \geq -\frac{\varepsilon \mu}{2\lambda_1} \|u\|_2^2 - \varepsilon C. \quad (29)$$

将式(25)~(29)代入式(23), 有

$$\Psi \geq \left(\frac{\gamma}{2} - 2\varepsilon \right) \|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^{2q} \|u_t\|_1^2 + \left(\frac{\lambda_1 - \mu}{2\lambda_1} \varepsilon - \varepsilon^2 C_B - \frac{\varepsilon^3}{2\lambda_1} \right) \|u\|_2^2 - \varepsilon C_3, \quad (30)$$

其中 $C_3 = 2C_2 + C + \frac{\kappa^2}{2\beta}$. 选择足够小的 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, 使得

$$\frac{\gamma}{2} - 2\varepsilon > 0, \quad \text{且} \quad \frac{\lambda_1 - \mu}{2\lambda_1} \varepsilon - \varepsilon^2 C_B - \frac{\varepsilon^3}{2\lambda_1} > 0.$$

将式(30)代入式(24), 根据 Gronwall 引理可得

$$E_\varepsilon(u(t)) \leq E_\varepsilon(u(0))e^{-\varepsilon t} + C_3(1 - e^{-\varepsilon t}) \leq C_B e^{-\varepsilon t} + C_3,$$

存在 $t_B = \max\left\{0, \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{C_B}{C_3}\right\}$, 对任意 $t \geq t_B$, 有

$$\|(u(t), u_t(t))\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \frac{E_\varepsilon(u(t)) + C_1}{c_1} \leq \frac{2C_3 + C_1}{c_1} =: R_0^2.$$

因此, 动力系统 $(\mathcal{H}, S(t))$ 是耗散的, 且 $\mathcal{B}_0 = \{\xi \in \mathcal{H} \mid \|\xi\|_{\mathcal{H}} \leq R_0\}$ 是有界吸收集. \square

定理 3 假设条件 (A_1) 和 (A_2) 成立, 则由问题(8)生成的动力系统 $(\mathcal{H}, S(t))$ 在空间 \mathcal{H} 中存在全局吸引子 \mathcal{A} . 此外, 该全局吸引子在 \mathcal{H}_s 中有界, 即

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{H}_s, \quad \|\mathcal{A}\|_{\mathcal{H}_s} := \sup_{\xi \in \mathcal{A}} \|\xi\|_{\mathcal{H}_s} \leq C,$$

其中 $s = 1/q$.

证明 根据定义 1 和吸引子存在定理, 只需验证对每个固定的 $t \geq 0$, $S(t)$ 在 \mathcal{H} 上连续以及 $(\mathcal{H}, S(t))$ 在 \mathcal{H} 中存在紧吸收集. 引理 5 和引理 6 既保证了 $S(t)$ 的连续性, 也给出了系统的耗散性, 即存在有界吸收集 $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{H}$, 对任意有界集 $B \subset \mathcal{H}$, 当 $t \geq t_B (t_B > 0)$ 时, $S(t)B \subset \mathcal{B}_0$. 其中 $\mathcal{B}_0 = \{\xi \in \mathcal{H} \mid \|\xi\|_{\mathcal{H}} \leq R_0\}$.

由定理 1 的 (i) 和 (ii), 对任意初值 $\xi \in \mathcal{B}_0$, 当 $t > 0$ 时, 对应弱解具有更高的正则性, 即存在 $s = 1/q > 0$ 和常数 $C_{R_0} > 0$, 使得

$$\|S(1)\xi\|_{\mathcal{H}_s} \leq C_{R_0}, \quad \forall \xi \in \mathcal{B}_0.$$

定义集合 $\mathcal{B}_1 = \{\xi \in \mathcal{H}_s \mid \|\xi\|_{\mathcal{H}_s} \leq C_{R_0}\}$. 当 $s > 0$, 由式(5)可得 $\mathcal{H}_s \hookrightarrow \mathcal{H}$. 因此, \mathcal{B}_1 在 \mathcal{H} 中是相对紧的. 设 $B \subset \mathcal{H}$ 是任意有界集, 由于 \mathcal{B}_0 是吸收集, 存在 $t_B > 0$, 使得

$$S(t)B \subset \mathcal{B}_0, \quad \forall t \geq t_B.$$

因此对任意 $t \geq t_B + 1$, 都有

$$S(t)B = S(1)[S(t-1)B] \subset S(1)\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_1.$$

由于连续半群 $S(t)$ 在 \mathcal{H} 中有紧吸收集 \mathcal{B}_1 , 根据定义 1 可知, 系统 $(\mathcal{H}, S(t))$ 存在全局吸引子 \mathcal{A} .

此外, $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}_1$. 由于 \mathcal{B}_1 在 \mathcal{H}_s 中有界, 因此 \mathcal{A} 在 \mathcal{H}_s 中也有界, 即 $\sup_{\xi \in \mathcal{A}} \|\xi\|_{\mathcal{H}_s} \leq C_{R_0}$. \square

4 强全局吸引子在 $\mathcal{H}_{1/q}$ 的存在性

下面证明, 定理 3 中得到的全局吸引子 \mathcal{A} , 为空间 $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_s)$ ($s = 1/q \in (0, 1]$) 中的全局吸引子.

定理 4 假设条件 (A_1) 和 (A_2) 成立, 则半群 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 在 \mathcal{H}_s 中满足条件 (C).

证明 由定理 3 可知, \mathcal{B}_1 是 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 在 \mathcal{H}_s 中的一个有界吸收集. 对所有 $t \geq t_*$, 有

$$\mathcal{B} := \bigcup_{t \geq t_*} S(t)\mathcal{B}_1$$

是一个正不变的有界吸收集, 其中 $t_* > 0$, 且满足 $S(t)\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_1$. 给定任意 $\delta \in (0, 1)$, 根据定义 3, 只需证明存在 $t_0 = t_0(\delta, \mathcal{B})$ 和 $m_0 = m_0(\delta, \mathcal{B}) \in \mathbb{N}$, 使得对所有 $t \geq t_0$ 和 $m \geq m_0$, 有

$$\|Q_m S(t)(u_0, u_1)\|_{\mathcal{H}_s} \leq \delta, \quad \forall (u_0, u_1) \in \mathcal{B}.$$

设 $(u(t), u_t(t)) = S(t)(u_0, u_1)$, 其中 $(u_0, u_1) \in \mathcal{B}$. 根据 \mathcal{B} 在 \mathcal{H}_s 中是正不变且有界的, 可得

$$\|(u(t), u_t(t))\|_{\mathcal{H}_s} \leq C_B, \quad \forall t \geq 0. \quad (31)$$

记 $(u^{(1)}, u_t^{(1)}) = (P_m u, P_m u_t)$ 和 $(u^{(2)}, u_t^{(2)}) = (Q_m u, Q_m u_t)$, 下面证明对所有 $t \geq t_0$ 和 $m \geq m_0$, 都有

$\|(u^{(2)}(t), u_t^{(2)}(t))\|_{\mathcal{H}_s} \leq \delta$. 取 $\epsilon = \min\left\{\epsilon_0, 1, \frac{\gamma}{6} \delta^q\right\}$, 将方程(8)与 $A^{\frac{s}{2}} u_t^{(2)} + \epsilon A^{\frac{s}{2}} u^{(2)}$ 做内积, 可得

$$\frac{d}{dt}H(t) + 2\epsilon H(t) + \gamma \|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^{2q} \|u_t^{(2)}\|_{1+s}^2 = \sum_{i=1}^5 J_i, \quad (32)$$

其中

$$\begin{aligned} H(t) &= \frac{1}{2} \|u_t^{(2)}(t)\|_s^2 + \frac{1}{2} \|u^{(2)}(t)\|_{2+s}^2 + \epsilon \left(u_t^{(2)}(t), A^{\frac{s}{2}} u^{(2)}(t) \right), \\ J_1 &= 2\epsilon \|u_t^{(2)}\|_s^2, & J_2 &= \left(\kappa A^{\frac{1}{2}} u^{(2)} - \beta \|u\|_1 A^{1/2} u^{(2)}, A^{\frac{s}{2}} u_t^{(2)} + \epsilon A^{\frac{s}{2}} u^{(2)} \right), \\ J_3 &= 2\epsilon^2 (u_t^{(2)}, A^{\nu^2} u^{(2)}) - \epsilon (f'(u), A^{\nu^2} u^{(2)}), & J_4 &= (f'(u) u, A^{\nu^2} u^{(2)}), \\ J_5 &= -\frac{d}{dt} (f(u), A^{\nu^2} u^{(2)}) - \frac{\gamma\epsilon}{2} \frac{d}{dt} \left[\|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^{2q} (u^{(2)})_{1+s}^2 \right] + \frac{\gamma\epsilon}{2} (u^{(2)})_{1+s}^2 \frac{d}{dt} \|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^{2q}. \end{aligned}$$

假设 $\epsilon > 0$ 为待定小常数, 由嵌入 $V_s \hookrightarrow L^2$ 和 $V_{2+s} \hookrightarrow V_{2s}$ 以及 Hölder 不等式, Young 不等式, 存在 $\epsilon_0 = \epsilon_0(\Omega) > 0$, 使得对任意 $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$, 有

$$\epsilon \left| \left(u_t^{(2)}(t), A^{\frac{s}{2}} u^{(2)}(t) \right) \right| \leq \frac{\epsilon_0}{2} \left(\|u_t^{(2)}(t)\|_s^2 + \|u^{(2)}(t)\|_{2s}^2 \right) \leq \frac{1}{4} \|u_t^{(2)}(t)\|_s^2 + \frac{1}{4} \|u^{(2)}(t)\|_{2+s}^2.$$

因此

$$\frac{1}{4} \|(u^{(2)}, u_t^{(2)})\|_{\mathcal{H}}^2 \leq H(t) \leq C \|(u^{(2)}, u_t^{(2)})\|_{\mathcal{H}}^2,$$

其中常数 $C = C(\Omega)$.

结合式(6)和 Young 不等式, 可得

$$\|u_t^{(2)}\|_s^2 \leq \|u_t^{(2)}\|_{1+s}^{\frac{2}{1+s}} \|u_t^{(2)}\|_{1+s}^{\frac{2s}{1+s}} \leq \delta + \delta^{-q} \|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^{2q} \|u_t^{(2)}\|_{1+s}^2. \quad (33)$$

进一步, 有

$$|J_1| \leq 2\epsilon\delta + 2\epsilon\delta^{-q} \|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^{2q} \|u_t^{(2)}\|_{1+s}^2. \quad (34)$$

根据引理3, 存在 $M_1 = M_1(\delta)$, 由紧嵌入 $\mathcal{V}_{2+s} \hookrightarrow \mathcal{V}_{2s}$, $\mathcal{V}_{2+s} \hookrightarrow \mathcal{V}_{1+s}$ 和式(31), 使得对所有 $m \geq M_1$, 都有

$$\|u^{(2)}\|_{2s} \leq \delta\epsilon, \quad \|u^{(2)}\|_{1+s} \leq \delta\epsilon, \quad \forall t \geq 0. \quad (35)$$

结合 Hölder 不等式和 Young 不等式, 式(33)和式(35)以及式(31), 可得

$$\begin{aligned} |J_2| &\leq \left| \left(\kappa A^{\frac{1}{2}} u^{(2)}, A^{\frac{s}{2}} u_t^{(2)} + \epsilon A^{\frac{s}{2}} u^{(2)} \right) \right| + \left| \left(\beta \|u\|_1 A^{1/2} u^{(2)}, A^{\frac{s}{2}} u_t^{(2)} + \epsilon A^{\frac{s}{2}} u^{(2)} \right) \right| \\ &\leq \left| \left(\kappa A^{\frac{1}{2}} u^{(2)}, A^{\frac{s}{2}} u_t^{(2)} \right) \right| + \left| \left(\kappa A^{\frac{1}{2}} u^{(2)}, \epsilon A^{\frac{s}{2}} u^{(2)} \right) \right| + \left| \left(\beta \|u\|_1 A^{1/2} u^{(2)}, A^{\frac{s}{2}} u_t^{(2)} \right) \right| + \left| \left(\beta \|u\|_1 A^{1/2} u^{(2)}, \epsilon A^{\frac{s}{2}} u^{(2)} \right) \right| \\ &\leq \frac{\kappa^2}{4\delta} \|u^{(2)}\|_{2+s}^2 + \delta \|u_t^{(2)}\|_s^2 + \delta \|u^{(2)}\|_2^2 + \frac{\kappa^2 \epsilon^2}{4\delta} \|u^{(2)}\|_{2s}^2 + \beta C_B \|u^{(2)}\|_{s+2} \|u_t^{(2)}\|_s + \epsilon \beta C_B \|u^{(2)}\|_2 \|u^{(2)}\|_{2s} \\ &\leq \kappa^2 \epsilon \delta + \epsilon \delta^{-q} \|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^{2q} \|u_t^{(2)}\|_{1+s}^2 + C_B \epsilon \delta + \beta C_B \epsilon \delta. \end{aligned} \quad (36)$$

同理, 结合注1, 式(31)和式(35)可得

$$|J_3| \leq 2 \left(\|u_t^{(2)}\| + \|f(u)\| \right) \|u^{(2)}\|_{2s} \leq C \left(\|u_t\| + \|u\|_2 + \|u\|_2^{p+1} \right) \|u^{(2)}\|_{2s} \leq C_B \delta \epsilon. \quad (37)$$

根据假设条件 (A_1) 和 (A_2) , 当 $n \geq 5$ 时, 由 Sobolev 嵌入 $\mathcal{V}_{2+s} \hookrightarrow H^{2+s} \hookrightarrow L^{\frac{4np}{8+4s-nsp}}$ (其中 $\frac{4np}{8+4s-nsp} \leq \frac{2n}{n-2(2+s)}$), 再结合 Hölder 不等式, 式(35)以及 Sobolev 嵌入 $\mathcal{V}_s \hookrightarrow H^s \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2s}}$ 与 $\mathcal{V}_{2-\frac{nsp}{4}} \hookrightarrow H^{2-\frac{nsp}{4}} \hookrightarrow L^{\frac{4n}{2n-8+nsp}}$ (其中 $\frac{8+4s-nsp}{4n} + \frac{n-2s}{2n} + \frac{2n-8+nsp}{4n} = 1$), 可推得

$$|J_4| \leq C \|u_t\| \|u^{(2)}\|_{2s} + C \|u\|^p \left\| u_t \right\|_{L^{\frac{4n}{8+4s-nsp}}} \left\| A^{\nu^2} u^{(2)} \right\|_{L^{\frac{4n}{2n-8+nsp}}} \leq C_B \delta \epsilon + C_B \|u^{(2)}\|_{2+2s-\frac{nsp}{4}}. \quad (38)$$

根据引理3, 存在 $M_2 = M_2(\delta)$, $V_{2+s} \hookrightarrow V_{2+2s-\frac{nsp}{4}}$ (其中 $2+2s-\frac{nsp}{4} \leq 2+2s-\frac{5s}{4} < 2+s$), 使得对所有 $m \geq M_2$, 有

$$\|u^{(2)}\|_{2+2s-\frac{ns}{4}} \leq \delta\epsilon, \quad \forall t \geq 0. \tag{39}$$

结合式(38)~(39), 有

$$|J_4| \leq C_B \delta \epsilon. \tag{40}$$

同时, 当 $1 \leq n \leq 4$ 时, 式(40)仍然成立.

选取 $\epsilon \leq \frac{\gamma}{6} \delta^q$, 令 $C_s \delta \epsilon \geq \kappa^2 \epsilon \delta + C_B \epsilon \delta + \beta C_B \epsilon \delta + \epsilon \delta$, 将式(34)~(40)代入式(32), 可得

$$\frac{d}{dt} H(t) + 2\delta H(t) \leq C_s \delta \epsilon - \frac{d}{dt} (f(u), A^{s/2} u^{(2)}) - \frac{\gamma \epsilon}{2} \frac{d}{dt} \left[\|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^{2q} \|u^{(2)}\|_{1+s}^2 \right] + \frac{\gamma \epsilon}{2} \|u^{(2)}\|_{1+s}^2 \frac{d}{dt} \|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^{2q}. \tag{41}$$

对式(41)利用 Gronwall 不等式, 有

$$H(t) \leq H(0) e^{-2\epsilon t} + C_s \delta \epsilon \int_0^t e^{-2\epsilon(t-\tau)} d\tau - \int_0^t e^{-2\epsilon(t-\tau)} \frac{d}{d\tau} (f(u), A^{s/2} u^{(2)}) d\tau - \frac{\gamma \mathcal{E}}{2} \int_0^t e^{-2\epsilon(t-\tau)} \frac{d}{d\tau} \left[\|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^{2q} \|u^{(2)}\|_{1+s}^2 \right] d\tau + \frac{\gamma \mathcal{E}}{2} \int_0^t e^{-2\epsilon(t-\tau)} \|u^{(2)}\|_{1+s}^2 \frac{d}{d\tau} \|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^{2q} d\tau. \tag{42}$$

利用分部积分, 式(31)和式(35), 进行逐项估计, 使得

$$C_s \delta \epsilon \int_0^t e^{-2\delta(t-\tau)} d\tau = C_s \delta \epsilon \cdot \frac{1 - e^{-2\epsilon t}}{2\epsilon} \leq C_s \delta, \tag{43}$$

$$-\int_0^t e^{-2\epsilon(t-\tau)} \frac{d}{d\tau} (f(u), A^{s/2} u^{(2)}) d\tau = -e^{-2\delta(t-\tau)} (f(u), A^{s/2} u^{(2)}) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} + 2\delta \int_0^t (f(u), A^{s/2} u^{(2)}) e^{-2\delta(t-\tau)} d\tau \leq C_B \delta \leq C_s \delta, \tag{44}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\gamma \epsilon}{2} \int_0^t e^{-2\epsilon(t-\tau)} \frac{d}{d\tau} \left[\|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^{2q} \|u^{(2)}\|_{1+s}^2 \right] d\tau \\ &= -\frac{\gamma \epsilon}{2} e^{-2\epsilon(t-\tau)} \|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^{2q} \|u^{(2)}\|_{1+s}^2 \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} + \gamma \epsilon^2 \int_0^t \|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^{2q} \|u^{(2)}\|_{1+s}^2 e^{-2\epsilon(t-\tau)} d\tau \\ &\leq C_B \epsilon^3 \delta^2 + C_B \epsilon^4 \delta^2 \frac{1 - e^{-2\epsilon t}}{2\epsilon} \leq C_B \delta \leq C_s \delta. \end{aligned} \tag{45}$$

根据式(13), 对于任意 $t \geq 0$, 可得

$$\gamma \int_0^t \|(u(t), u_t(t))\|_{\mathcal{H}} \|(u(t), u_t(t))\|_{\mathcal{H}}^2 d\tau = E(u(0)) - E(u(t)) \leq C_B. \tag{46}$$

由于 u 满足方程(8), 则有

$$\begin{aligned} \frac{\gamma \epsilon}{2} \int_0^t e^{-2\epsilon(t-\tau)} \|u^{(2)}\|_{1+s}^2 \frac{d}{d\tau} \|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^{2q} d\tau &= \frac{q\gamma \epsilon}{2} \int_0^t e^{-2\epsilon(t-\tau)} \|u^{(2)}\|_{1+s}^2 \|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^{2(q-1)} \frac{d}{d\tau} (\|u_t\|^2 + \|u\|^2) d\tau \\ &\leq C_B \delta^2 \epsilon^3 \cdot \frac{1 - e^{-2\epsilon t}}{2\epsilon} + C_B \delta^2 \epsilon^3 \int_0^t \|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^{2q} \|u_t\|^2 d\tau \leq C_B \delta \epsilon \leq C_s \delta. \end{aligned} \tag{47}$$

将式(43)~(47)代入式(42), 选取 $t \geq \frac{1}{2\epsilon} \ln \frac{1}{\delta} = \left(\min \left\{ \epsilon_0, 1, \frac{\gamma}{6} \delta^q \right\} \right)^{-1} \ln \frac{1}{\sqrt{\delta}}$ 且 $m \geq \max \{M_1, M_2\}$, 可得

$$\|(u^{(2)}(t), u_t^{(2)}(t))\|_{\mathcal{H}}^2 \leq 4H(t) \leq C \|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{H}}^2 e^{-2\epsilon t} + C_s \delta \leq 2C_s \delta. \quad \square$$

由引理 2, 定理 3 和定理 4, 得到如下定理

定理 5 假设条件(A₂)成立, 则由方程(8)弱解生成的半群 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 是范数到弱连续的 $(\mathcal{H}, \mathcal{H}^s)$ -半群.

该半群在空间对 $(\mathcal{H}, \mathcal{H}^s)$ 上存在全局吸引子 \mathcal{A}_s , 满足

- (i) \mathcal{A}_s 是不变的;
- (ii) \mathcal{A}_s 在 \mathcal{H}_s 中是紧的;
- (iii) \mathcal{A}_s 在 \mathcal{H}_s 的范数拓扑下吸引 \mathcal{H} 中任意有界子集.

此外, 根据吸引子的定义, 有 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_s$, 其中 \mathcal{A} 为定理 3 中的全局吸引子.

参考文献:

马巧珍, 孙春友, 钟承奎, 2007. 非线性梁方程强全局吸引子的存在性[J]. 数学物理学报(A辑), 27(5): 941-948.
 Babin A V, Vishik M I, 1992. Attractors of evolution equations[M]. Amsterdam: North-Holland.

- Balakrishnan A V, 1988. A theory of nonlinear damping in flexible structures[C]//The Proceedings of the Comcon Workshop on Stabilization of Flexible Structures/Montpellier, France December 1987.
- Balakrishnan A V, Taylor L W, 1989. Distributed parameter nonlinear damping models for flight structures[C]//Proceedings of Damping '89: 8-10 February 1989 West Palm Beach, Florida.
- Berger H M, 1955. A new approach to the analysis of large deflections of plates[J]. *J Appl Mech*, 22(4): 465-472.
- Cavalcanti M M, Domingos Cavalcanti V N, Jorge Silva M A, et al, 2021. Stability for extensible beams with a single degenerate nonlocal damping of Balakrishnan-Taylor type[J]. *J Differ Equ*, 290: 197-222.
- Chepyzhov V V, Vishik M I, 2002. Attractors for equations of mathematical physics[M]. Providence: American Mathematical Society.
- Chueshov I, Lasiecka I, 2008. Long-time behavior of second order evolution equations with nonlinear damping[J]. *Memoirs AMS*, 195(912): 1-178.
- Gomes Tavares E H, Jorge Silva M A, Narciso V, et al, 2023. Dynamics of a class of extensible beams with degenerate and non-degenerate nonlocal damping[J]. *Adv Differ Equ*, 28(7/8): 685-752.
- Ma Q F, Wang S H, Zhong C K, 2002. Necessary and sufficient conditions for the existence of global attractors for semigroups and applications[J]. *Indiana Univ Math J*, 51(6): 1541-1570.
- Medeiros L A, 1979. On a new class of nonlinear wave equations[J]. *J Math Anal Appl*, 69(1): 252-262.
- Meng F J, Wu J, Zhao C X, 2019. Time-dependent global attractor for extensible Berger equation[J]. *J Math Anal Appl*, 469(2): 1045-1069.
- Silva M A J, Narciso V, Vicente A, 2019. On a beam model related to flight structures with nonlocal energy damping[J]. *Discrete Contin Dyn Syst B*, 24(7): 3281-3298.
- Sun Y, Yang Z J, 2022a. Attractors and their continuity for an extensible beam equation with rotational inertia and nonlocal energy damping[J]. *J Math Anal Appl*, 512(2): 126148.
- Sun Y, Yang Z J, 2022b. Strong attractors and their robustness for an extensible beam model with energy damping[J]. *Discrete Contin Dyn Syst B*, 27(6): 3101-3129.
- Woinowsky-Krieger S, 1950. The effect of an axial force on the vibration of hinged bars[J]. *J Appl Mech*, 17(1): 35-36.
- Yan S L, Zhong C K, 2025. Well-posedness and strong attractors for a beam model with degenerate nonlocal strong damping[J]. *J Differ Equ*, 442: 113495.
- Yang L, Wang X, 2017. Existence of attractors for the non-autonomous Berger equation with nonlinear damping[J]. *Electron J Differ Equ*, 2017(278): 1-14.
- Yao X B, Ma Q Z, 2017. Global attractors of the extensible plate equations with nonlinear damping and memory[J]. *J Funct Spaces*, 2017(1): 4896161.
- Zhong C K, Yang M H, Sun C Y, 2006. The existence of global attractors for the norm-to-weak continuous semigroup and application to the nonlinear reaction-diffusion equations[J]. *J Differ Equ*, 223(2): 367-399.

(责任编辑 冯兆永)